Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Лицей «Сигма»

ПРИНЯТО
Решением Педагогического Совета
Протокол №10
от 27.08.2021

УТВЕРЖДАЮ
Директор МБОУ "Лицей "Сигма"
_______________/В.Г.Карбышев
Приказ 05-01/140
от 27.08.2021г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ (ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ) ПРОГРАММА

Социально-гуманитарная направленность
«Мир уравнений и неравенств»

(срок реализации-7 месяцев, возраст детей-16-17 лет)

Составитель: Смахтина И.Г.,
учитель математики

Барнаул 2021

Содержание

1.Комплекс основных характеристик программы

1.1. Пояснительная записка

Анализ заданий вступительных экзаменов, собеседований в ВУЗы страны показывает что задачи на решение уравнений и неравенств составляют примерно половину предложенных работ.

При решении некоторых тригонометрических, логарифмических, показательных, иррациональных уравнений и неравенств помимо известных из школьной программы методов решения, можно применять нестандартные приемы, которые порой существенно упрощают и сокращают решение. Знакомство и овладение этими методами способствует развитию познавательной деятельности учащихся.

Общая продолжительность реализации дополнительной программе «Мир уравнений и неравенств»- 28 часов (1 час в неделю) или 56 часов (2 часа в неделю).

Продолжительность одного занятия – 40 минут.

Зачисление в группу ведется на добровольной основе, по желаю учащихся и их родителей (законных представителей).

1.2. Цели и задачи программы

Цели настоящей программы: Обобщить и систематизировать основные методы решения уравнений и неравенств.

Задачи:

- познакомить учащихся с некоторыми нестандартными способами решения уравнений и неравенств;
- развивать познавательные навыки учащихся;
- создать условия для успешного продолжения образования.

1.3. Содержание программы

1. Нестандартные методы решения алгебраических уравнений

Умножение уравнения на функцию. Используя симметричности уравнения. Использование суперпозиции функций. Использование уравнения на промежуточных действительной оси. Понижение степени при решении некоторых алгебраических уравнений.

2. Уравнения и неравенства содержащие радикалы, степени и модули.

Возведение в степень при решении иррациональных уравнений, умножение на функцию уравнения и неравенства, содержащие неизвестную в основании и показатели степени. Решение уравнений и неравенств содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины.

3. Решение уравнений и неравенств с использование свойств, входящих в них функций.

Использование ОДЗ. Использование ограниченности и монотонности функций. Использование графиков функций. Метод интервалов для непрерывности функций.

1.4. Планируемые результаты

Учащиеся должны уметь:

- решать алгебраические уравнения высших степеней, используя нестандартные методы;
- пользоваться методом интервалов для непрерывных функций при решении неравенств;
- применять свойства функций при решении уравнений и неравенств;
- понимать знания математической науки для решения задач, возникающих в теории и практики.

2. Комплекс организационно-педагогических условий
2.1.Учебно-тематический план

1час в неделю

№ раздела темы	Наименование разделов и тем	Всего часов на тему	Из них	
			Теоретические занятия	практические
1. Нестандартные методы решения алгебраических уравнений- 10ч				
1	Умножение уравнения на функцию.	1	1	
2	Используя симметричности уравнения.	1	1	
3-4	Использование суперпозиции функций Использование уравнения на промежуточных действительной оси..	2	1	1
5-6	Решение уравнений вида $(x+a)^4+(x+в)^4=c$	2		2
7-8	Решение уравнений вида $(ax^2+в_1x+c)(ax^2+ в_2x+c)=Ax^2$	2		2
9-10	Решение уравнений вида $(x-a)(x-в)(x-у)(x-б)=Ax^2$	2		2
2. Уравнения и неравенства содержащие радикалы, степени и модули- 10ч				
11-12	Возведение в степень. Решение уравнений вида №f(x) +-№g(x)=h(x)	2	1	1

13-14	Умножение уравнений на функцию	2	1	1
15-16	Раскрытие знака модулей. Уравнения вида (f(x))=g(x)	2	1	1
17-18	Неравенства вида[f(x)] -g(x)	2	1	1
19-20	Уравнения и неравенства вида [f(x)]=[g(x)], [f(x)]v[g(x)]	2	1	1
3. Решение уравнений и неравенств с использование свойств, входящих в них функций-8ч				
21	Использование ОДЗ.	1	1	
22	Использование ограниченности функций. Метод мажорант	1	1	
23-24	Использование монотонности функций	2	1	1
25-26	Использование графиков функций.	2	1	1
27-28	Метод интервалов для непрерывности функций.	2	1	1
	Всего	28	13	15

2часа в неделю

№ раздела темы	Наименование разделов и тем	Всего часов на тему	Из них	
			Теоретические занятия	практические
1. Нестандартные методы решения алгебраических уравнений- 20ч				
1-2	Умножение уравнения на функцию.	2	2	
3-4	Используя симметричности уравнения.	2	2	
5-8	Использование суперпозиции функций Использование уравнения на промежуточных действительной оси..	4	2	2
9-12	Решение уравнений вида $(x+a)^4+(x+в)^4=c$	4		4

13-16	Решение уравнений вида $(ax^2+в_1x+c)(ax^2+в_2x+c)=Ax^2$	4		4
17-20	Решение уравнений вида (x-a)(x-в)(x-y)(x-б)=Ax^2	4		4
2. Уравнения и неравенства содержащие радикалы, степени и модули- 20ч				
21-24	Возведение в степень. Решение уравнений вида №f(x) +-№g(x)=h(x)	4	2	2
25-28	Умножение уравнений на функцию	4	2	2
29-32	Раскрытие знака модулей. Уравнения вида (f(x))=g(x)	4	2	2
33-36	Неравенства вида[f(x)] -g(x)	4	2	2
37-40	Уравнения и неравенства вида [f(x)]=[g(x)], [f(x)]v[g(x)]	4	2	2
3. Решение уравнений и неравенств с использование свойств, входящих в них функций-16ч				
41-42	Использование ОДЗ.	2	2	
43-44	Использование ограниченности функций. Метод мажорант	2	2	
45-48	Использование монотонности функций	4	2	2
49-52	Использование графиков функций.	4	2	2
53-56	Метод интервалов для непрерывности функций.	4	2	2
	Всего	56	26	30

2.2. Условия реализации программы

Для эффективной реализации программы используются разнообразные формы, методы и приёмы обучения, делая особый упор на развитие самостоятельности, познавательного интереса и творческой активности обучающихся. В реализации программы большая часть времени уделяется отработке практических навыков.

При реализации программы используются такие формы занятий, как лекция, практикум.

Содержание каждой темы включает в себя работу с различными источниками математической литературы.

2.3. Формы аттестации

Метод проведения промежуточной и итоговой аттестации наблюдение.

2.4. Оценочные материалы

1. Задание

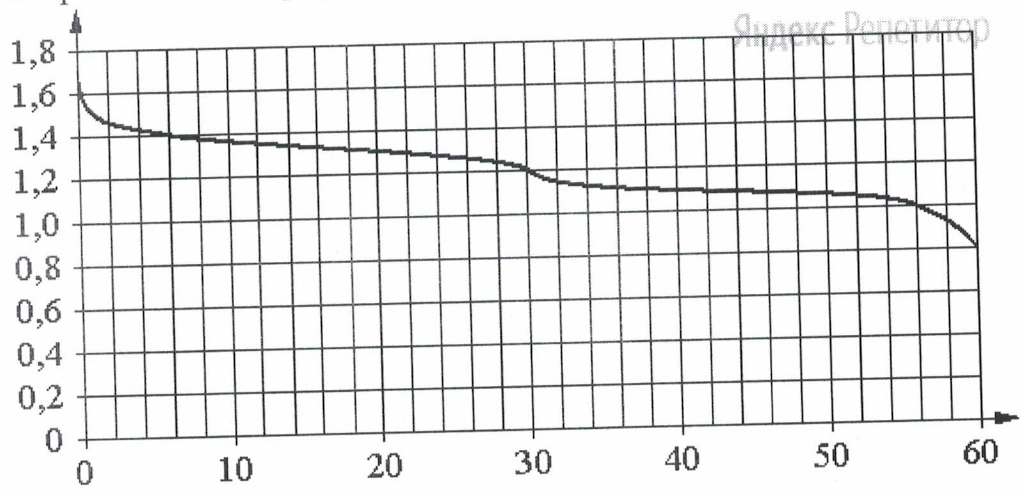
Покупатель в магазине берет следующие товары: стиральный порошок стоимостью руб, полкилограмма яблок —рублей за килограмм и груши — рублей за штуку. В магазине действовала скидка на все фрукты.

Сколько рублей сдачи он получит с рублей?

2. Задание

При работе машинки на пульте управления происходит постепенная разрядка батарейки, что приводит к падению напряжения. На графике изображена зависимость напряжения в цепи от времени работы игрушки. На горизонтальной оси отмечено время работы машинки в минутах, на вертикальной оси - напряжение в вольтах. Скорость машинки связана с

напряжением по формуле (м/с).



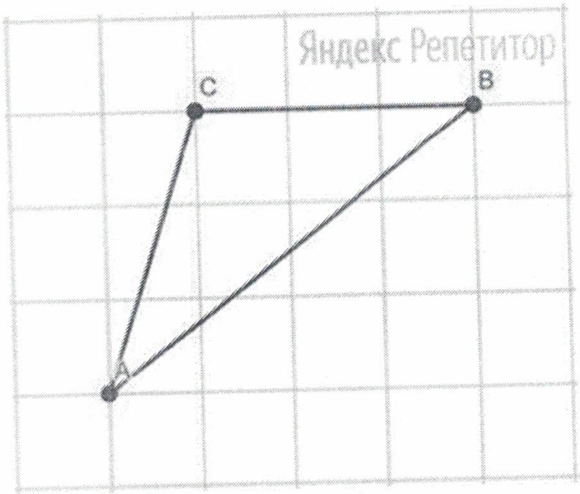
Пользуясь графиком, определите какую скорость будет иметь машинка через

минут работы.

Ответ дайте в метрах в секунду.

3. Задание

На клетчатой бумаге размером изображён треугольник.



Найдите длину его высоты, проведенной из вершины.

4. Задание

В случайном эксперименте бросают две игральные кости.

Найдите вероятность того, что в сумме выпадет ровно, или очков.

Результат округлите до сотых.

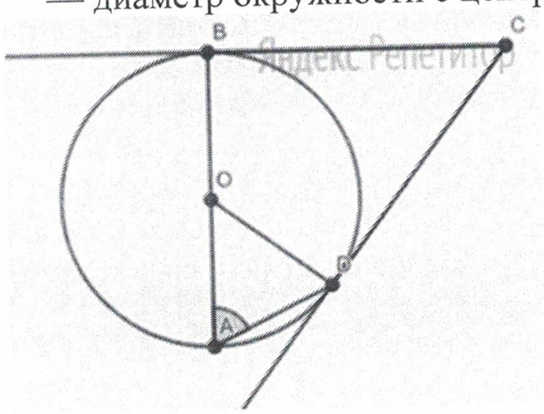
5. Задание

Решите уравнение.

Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите больший из них.

6. Задание

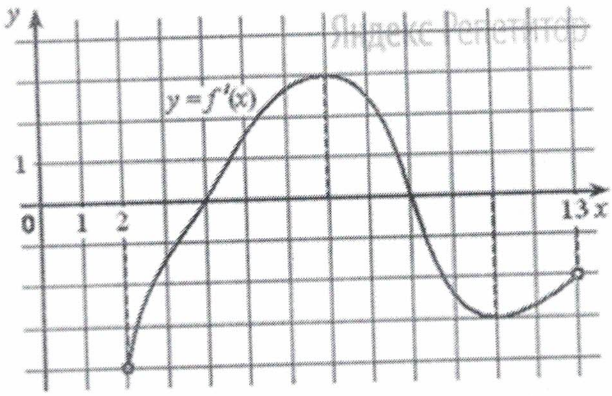
— диаметр окружности с центром в точке, и— касательные к ней.



Найдите угол, если угол равен.

7. Задание

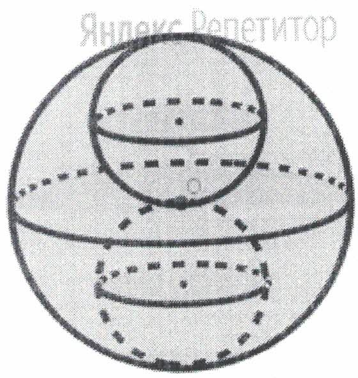
На рисунке изображён график функции — производной функции определенной на интервале.



В какой точке отрезка функция принимает наименьшее значение?

8. Задание

В шаре радиусом находятся два других шара, центр которых лежит на диаметре большего шара. Поверхности маленьких шаров проходят через центр большего шара и касаются его поверхности изнутри.



Найдите объем внутренней части большего шара не заполненного малыми шарами.

9. Задание

Найдите значение выражения .

10. Задание

Вес тела, выраженный в Ньютонах, зависит от расстояния до оси собственного вращения Земли. В разных точках земного шара он может быть найден по формуле:

, где— масса тела в кг, м/с — ускорение свободного падения, принять равным,— расстояние до оси вращения, с. — период обращения земли вокруг собственной оси.

На сколько отличается вес тела массой кг на экваторе, где расстояние до оси вращения примерно равно м, от веса тела на северном полюсе, где расстояние до оси вращения примерно равно нулю?

11. Задание

Некоторый сорт яблок на состоит из воды. Известно, что сок, полученный из этих яблок на состоит из воды.

Сколько килограмм яблок понадобится для получения кг свежевыжатого сока? Потерями жидкости в процессе соковыжимания — пренебречь.

12. Задание

Найдите наибольшее значение функции на отрезке

13. Задание

1. Решите уравнение.
2. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку.

Решите это задание в тетради. После завершения теста вы увидите разбор для самопроверки.

14. Задание

В правильной четырёхугольной призме стороны основания равны а боковые ребра —. На рёбрах и отмечены точки и соответственно, причём. Плоскость параллельна прямой и содержит точки и.

1. Докажите, что прямая перпендикулярна плоскости.
2. Найдите расстояние от точки до плоскости.

Решите это задание в тетради. После завершения теста вы увидите разбор для самопроверки.

15. Задание

Решите неравенство.

Решите это задание в тетради. После завершения теста вы увидите разбор для самопроверки.

16. Задание

На сторонах и ромба отмечены точки, и, соответственно. Причем так, что.

1. Докажите, что прямые, , и делят меньшую диагональ на равных отрезков.
2. Найдите площадь треугольника, где— точка пересечения прямых и если дополнительно известно, что площадь ромба равна.

Решите это задание в тетради. После завершения теста вы увидите разбор для самопроверки.

17. Задание
-го января клиент взял кредит в банке на шесть месяцев в размере млн рублей. Условия его возврата таковы:

- -го числа каждого месяца долг увеличивается на процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со -го по -е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- в случае задержки выплат (от до дней) дополнительно взимаются пени: за каждые просроченные сутки от суммы, которую необходимо выплатить в текущем месяце;
- -го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата

Долг (в тыс рублей)

Найдите общую сумму выплат сверх взятого кредита, если известно, что клиент осуществлял выплаты февраля, марта, апреля, мая, июня и июля.

18. Задание
Найдите все значения, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

19. Задание
Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по, по и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число, а остальные числа, равные, стираются. Например, если задуманы числа, то на доске будет записан набор.

1. Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор.
2. Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор?
3. Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

2.5. Методические материалы

Уравнения

Задания

а) Решите уравнение cos2x = 1-cos(п/2-x)
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку [-5п/2;-п].

Алгоритм решения:

Пункт а)

1. При помощи тригонометрических формул приводим уравнение к виду, содержащему только одну тригонометрическую функцию.
2. Заменяем эту функцию переменной t и решаем получившееся квадратное уравнение.
3. Делаем обратную замену и решаем простейшие тригонометрические уравнения.

Пункт б)

1. Строим числовую ось.
2. Наносим на нее корни.
3. Отмечаем концы отрезка.
4. Выбираем те значения, которые лежат внутри промежутка.
5. Записываем ответ.

Решение:

Пункт а)
1. Преобразуем правую часть равенства, используя формулу приведения $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$. Имеем:

$$\cos 2x = 1 - \sin x.$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя формулу косинуса двойного аргумента, с использованием синуса:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

Получаем такое уравнение: $1 - \sin^2 x = 1 - \sin x$
Теперь в уравнении присутствует только одна тригонометрическая функция $\sin x$.
2. Вводим замену: $t = \sin x$. Решаем получившееся квадратное уравнение:

$$1 - 2t^2 = 1 - t,$$
$$-2t^2 + t = 0,$$
$$t\,(-2t + 1) = 0,$$
$$t = 0 \text{ или } -2t + 1 = 0,$$
$$t_1 = 0 \quad t_2 = 1/2.$$

3. Делаем обратную замену:

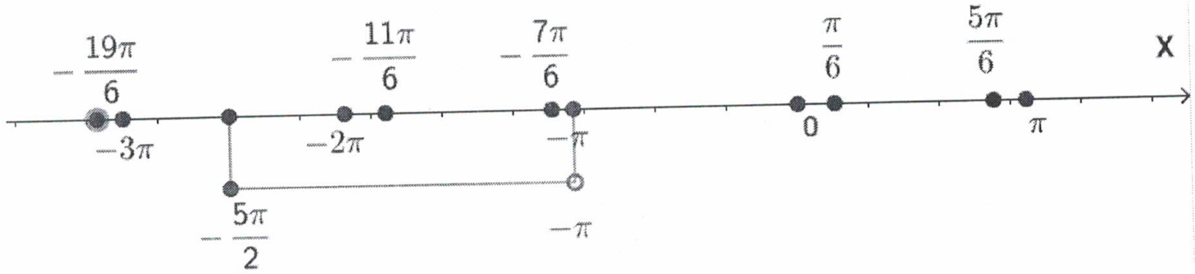
$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x = ½$$

Решаем эти уравнения:

$$\sin x = 0 \leftrightarrow x = \pi n,\ n \in Z$$
$$\sin(x) = 1/2 \leftrightarrow x = (-1)^n \cdot (\pi/6) + \pi n,\ n \in Z.$$

Следовательно, получаем два семейства решений.
Пункт б):
1. В предыдущем пункте получено два семейства, в каждом из которых бесконечно много решений. Необходимо выяснить, какие из них, находятся в заданном промежутке. Для этого строим числовую прямую.

2. Наносим на нее корни обоих семейств, пометив их зеленым цветом (первого) и синим (второго).



3. Красным цветом помечаем концы промежутка.
4. В указанном промежутке расположены три корня что три корня: $-2\pi;-11\pi/6$ и $-7\pi/6$.

Ответ:
а) $\pi n,\ n \in Z$; $(-1)^n \cdot (\pi/6) + \pi n,\ n \in Z$
б) $-2\pi;-11\pi6;-7\pi6$

Задание

а) Решите уравнение $4 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Алгоритм решения:

Пункт а)

1. Заменяем эту функцию переменной *t* и решаем получившееся квадратное уравнение.
2. Делаем обратную замену и решаем простейшие показательные, потом тригонометрические уравнения.

Пункт б)

1. Строим координатную плоскость и окружность единичного радиуса на ней.
2. Отмечаем точки, являющиеся концами отрезка.
3. Выбираем те значения, которые лежат внутри отрезка.
4. Записываем ответ.

Решение:

Пункт а)
1. Вводим замену $t = 4^{\cos x}$. тогда уравнение примет вид:
$4t^2 - 9t + 2 = 0$
Решаем квадратное уравнение с помощью формул дискриминанта и корней:

$$D = b^2 - c = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49,$$

$$t_1 = (9 - 7)/8 = 1/4,\ t_2 = (9+7)/8 = 2.$$

3. Возвращаемся к переменной x:

$4^{\cos x} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $4^{\cos x} = 2 = 4^{1/2}$

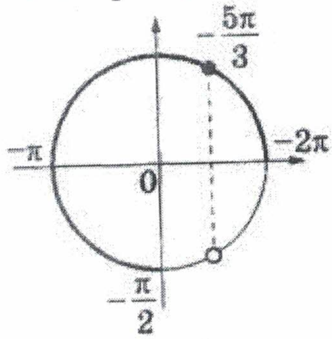
$4^{\cos x} = 4^{-1}$ $\qquad$ $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = -1$

$x = -\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Пункт б)

1. Строим координатную плоскость и окружность единичного радиуса на ней.
2. Отмечаем точки, являющиеся концами отрезка.
3. Выбираем те значения, которые лежат внутри отрезка..



Это корни $-\dfrac{5\pi}{3};\ -\pi$. Их два.

Ответ:

а) $-\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{5\pi}{3};\ -\pi$

Производная

Для решения данной группы задач необходимо знать:

- таблицу производных и правила дифференцирования
- геометрический смысл производной
- свойства производной для исследования функций
- физический (механический) смысл производной

Уважаемые друзья, излагать всю теорию в чистом виде из учебника мы не будем.

Материал постарались выстороить так, чтобы понятна была суть.

Таблица производных и правила дифференцирования.

Правила дифференцирования:

Если с — произвольная постоянная (число):

В задачах понадобится знание далеко не всех производных элементарных функций, а только первые шесть, но мы приведём всю таблицу (слева функция, справа её производная):

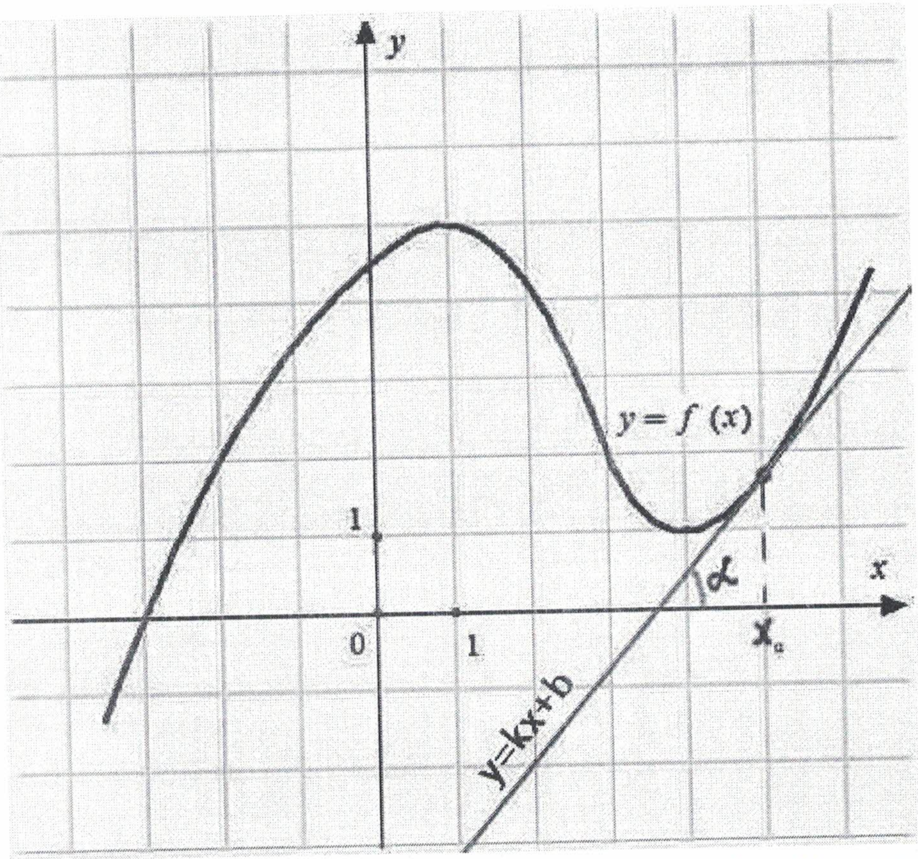
Таблица производных

f (x) (функция)	f'(x) (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Геометрический смысл производной

Построим произвольный график некой функции на координатной плоскости,

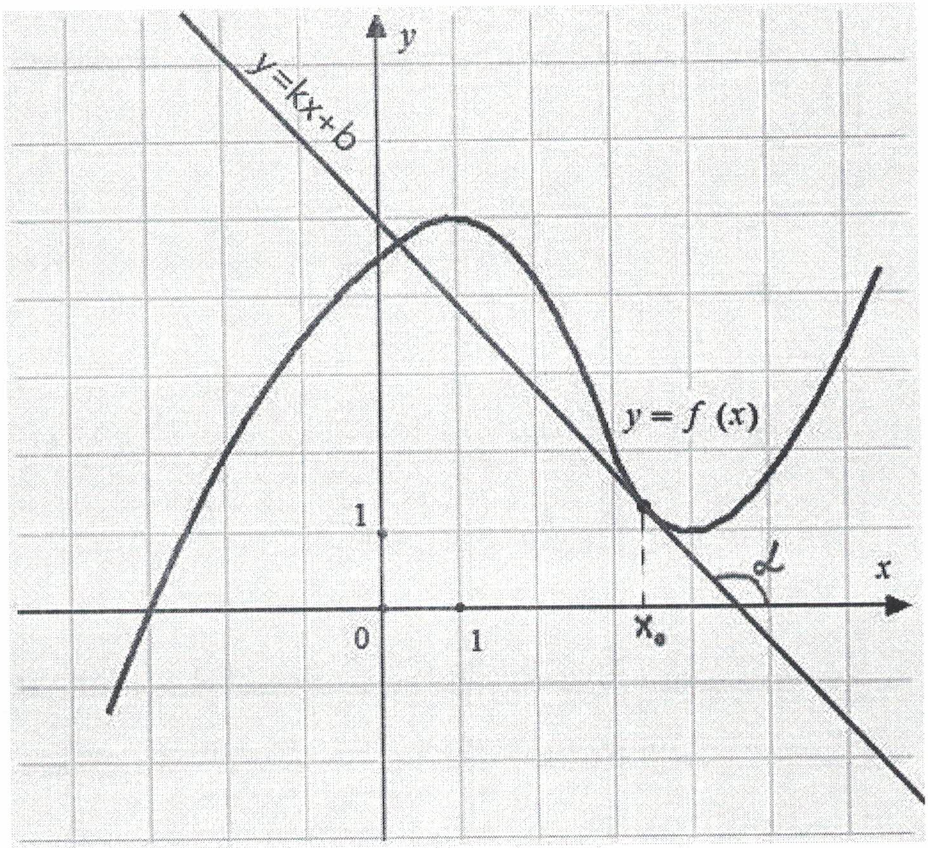
построим касательную в точке , обозначим угол между прямой о осью *ox* как :

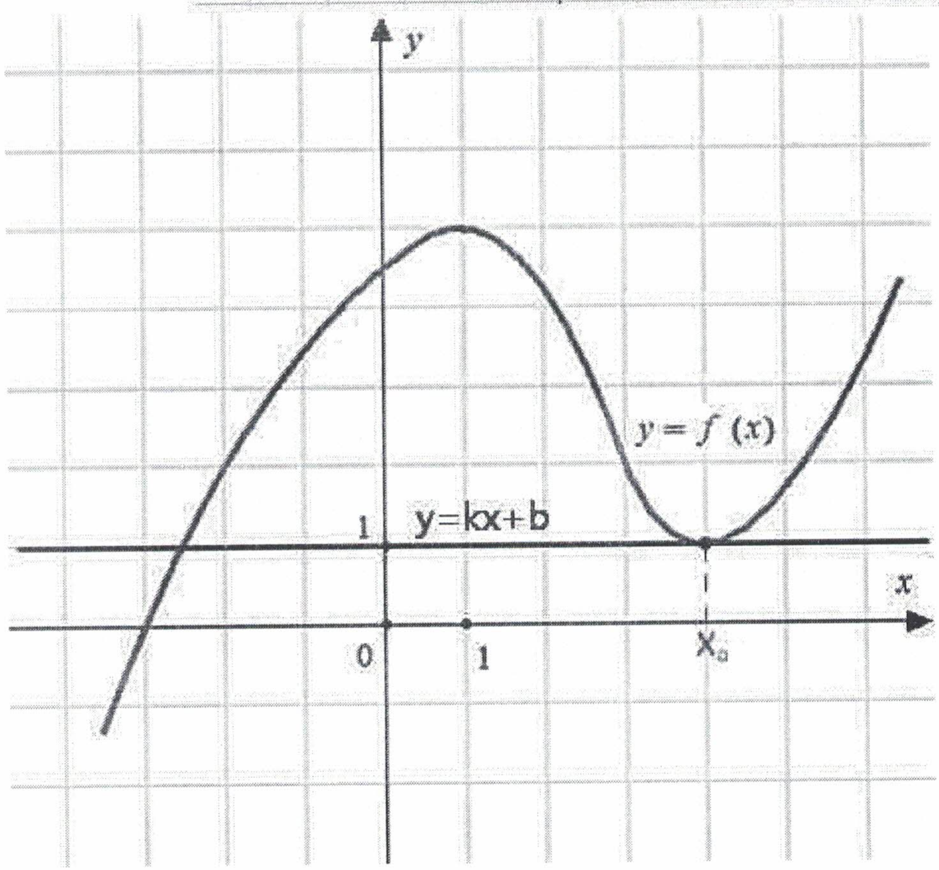


Из курса алгебры известно, что уравнение прямой имеет вид . ЗАПОМНИТЬ! Производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке. В этом и состоит *геометрический смысл* производной.

То есть производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной:

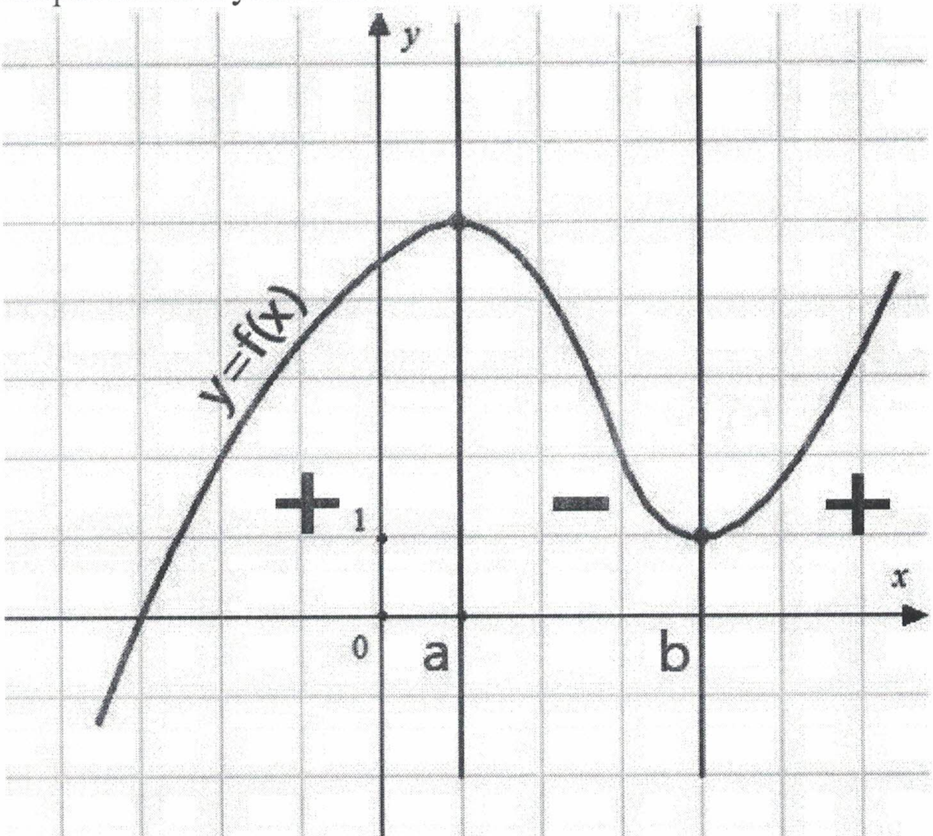
А угловой коэффициент в свою очередь равен тангенсу угла , то есть: В зависимости от того, через какую точку графика проходит касательная, угол может быть меньше или больше . Проиллюстрируем, два случая, когда угол больше 90 градусов, и когда равен нулю градусов (случай, когда пказан выше):





По свойству тангенса:
- при имеет положительное значение (значит производная имеет положительное значение)
- при равен нулю (значит производная равна нулю)
- при имеет отрицательное значение (значит производная

имеет отрицательное значение)
На основании вышеизложенного можно сделать вывод о свойстве производной для
исследования поведения функции… (см. далее) Свойства производной для исследования функций
Что такое возрастание и убывание вы поймѐте интуитивно.
Если значение производной в определѐнной точке из некоторого интервала имеет
положительное значение ( ), то график функции на этом интервале
возрастает.
Если значение производной в определѐнной точке из некоторого интервала имеет
отрицательное значение ( ), то график функции на этом интервале
убывает.
Вышеизложенные свойства необходимы для исследования поведения функции на
возрастание и убывание.



Точки, в которых функция меняет своѐ поведение с возрастания на убывание (и наоборот, с убывания на возрастание), называются экстремумами. Их ещѐ называют
точками максимума (минимума) функции. Производная в этих точках равна нулю.
Касательные в этих точках параллельны оси *ox*.
Таким образом, вычислив производную и приравняв еѐ к нулю можно найти

точки,
которые разбивают числовую ось на интервалы. На каждом из этих интервалов можно определить знак производной и далее сделать вывод о её возрастании или
убывании. Функция в точках, где производная равна нулю меняет свой знак не всегда.
Какие выводы мы можем сделать, когда дан график функции? 1. Можем определить интервалы возрастания (убывания) функции, зна
производной на этом интервале.
2. Можем определить точки максимума (минимума) функции (если задан масштаб), их количество.
3. Можем определить количество экстремумов.
4. Можем определить количество точек, в которых производная равна нулю.
5. Количество касательных к графику функции, параллельных оси *ох*
6. Количество касательных, параллельных какой-либо данной касательной.
7. Значение производной функции в некоторой точке, если даны две точки, чере которые проходит касательная.
Какие выводы мы можем сделать, когда дан график производной функции?
1. Можем определить интервалы, на которых функция возрастает (убывает).
2. Точки минимума (максимума) функции.
3. Количество точек минимума (максимума) функции.
4. Количество экстремумов функции.
5. Можем определить точки, в которых функция приобретает максимально (минимальное) значение на заданном интервале.
И другое.
Физический (механический) смысл производной
Пусть задан закон движения материальной точки вдоль координатной оси, где координата движущейся точки, – время.
Скорость в определённый момент времени – это производная координаты п времени. В этом и состоит *механический смысл* производной.
Аналогично, *ускорение – это производная скорости по времени*:
Таким образом, физический смысл производной это скорость. Это может быть скорость движения, скорость изменения какого либо процесса (например рост бактерий), скорость совершения работы (и так далее, прикладных задач множество)

Виды деятельности учащихся:

1. работа с источниками информации, с современными средствами коммуникации;
2. критическое осмысление полученной информации, поступающей из разных источников, формулирование на этой основе собственных заключений и оценочных суждений;
3. решение познавательных и практических задач, отражающих типичные ситуации;
4. освоение типичных социальных ролей через участие в обучающих играх и тренингах, моделирующих ситуации из реальной жизни;

5. умение вести аргументированную защиту своей позиции, оппонирование иному мнению через участие в дискуссиях, диспутах, дебатах о наиболее рациональном методе решения;

Образовательные технологии, применяемые на занятиях курса:

проблемное изложение;

«мозговая атака» (технология групповой творческой деятельности);

проблемная дискуссия с выдвижением идей проектов;

технология деятельностного метода;

технология сотрудничества.

2.6. Список литературы

1. С.Н.Олехник идр. Уравнения и неравенства (Нестандартные способы решения).-М.: Дрофа, 2001